Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Verano 2015

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (12 pts.) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define por:

   (a) $f(z) = ze^{5/x} + \dfrac{1-\cos z}{iz^2}$, desarrollarla en serie de Laurent-Taylor de potencias de z.

   (b) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^n}$, hallar el anillo de convergencia de f y la expresión de f en términos de funciones elementales.

2. (8 pts.) Sea $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(3z)}{e^{-2z}+2z-1}$. Estudiar la naturaleza de la singularidad de f en $z=0$. Hallar además $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz$ usando la fórmula integral de Cauchy.

3. (15 pts.) Sea $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$, para $a, b \in \mathbb{R}^+$ distintos.

   (a) Hallar los polos y los residuos de f.

   (b) Tomar un contorno de integración apropiado con $f(z)$ para demostrar que

   $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$$

   (c) Suponiendo el paso al límite dentro del signo integral válido, deducir de la parte anterior que cuando $b \to a$, se tiene que

   $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{\pi}{2a^3}(a+1)e^{-a}$$

Nota: Algunos de los ejercicios de la página original tienen errores de tipeo. Los enunciados puestos a continuación sí son correctos.

Pregunta 1 (12 puntos) Si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se definen por

$$f(z) = ze^{5/z} + \frac{1 - cosz}{iz^2}$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^n}$$

(a) Desarrollar f en serie de Laurent-Taylor en potencias de z.
(b) Hallar el anillo de convergencia de g y la expresión de g en términos de las funciones elementales

Solución

(a) Para hacer el desarrollo en series de Laurent-Taylor de f, debemos considerar el desarrollo de Taylor de la funciones elementales que están en nuestra función.

Estas son,

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$cost = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots$$

Entonces,

$$e^{5/z} = 1 + \frac{5}{z} + \frac{5^2/2!}{z^2} + \frac{5^3/3!}{z^3} + \cdots$$

$$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots$$

Así,

$$f(z) = ze^{5/z} + \frac{1 - cosz}{iz^2} = z\left(1 + \frac{5}{z} + \frac{5^2/2!}{z^2} + \frac{5^3/3!}{z^3} + \cdots\right) + \frac{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots\right)}{iz^2} =$$

$$= \left(\cdots + \frac{5^3/3!}{z^2} + \frac{5^2/2!}{z} + 5 + z\right) + \frac{1}{i} \frac{\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \cdots\right)}{z^2} = \left(\cdots + \frac{5^3/3!}{z^2} + \frac{5^2/2!}{z} + 5 + z\right) + \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} z^{1-n} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} z^{2n} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} z^{1-n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} z^{2n}}$$

(b) Estudiemos el anillo de convergencia de la función g, para ello consideremos el **criterio del cociente absoluto** para cada una de las sumatorias que conforman a la función

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}(z+i)^{n+1}}}{\frac{1}{2^n(z+i)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n(z+i)^n}{2^{n+1}(z+i)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n(z+i)^n}{2^n 2(z+i)^n(z+i)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2(z+i)}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \left|\frac{1}{z+i}\right| < 1 \to \boxed{|z+i| > \frac{1}{2}}$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(z+i)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{(z+i)^n}{(1+i)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z+i)^{n+1}(1+i)^n}{(z+i)^n(1+i)^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z+i}{1+i}\right| = \left|\frac{z+i}{1+i}\right| < 1 \to |z+i| < |1+i| \to \boxed{|z+i| < \sqrt{2}}$$

Finalmente, el anillo de convergencia de la serie es

$$\boxed{\frac{1}{2} < |z+i| < \sqrt{2}}$$

Por otro lado, hallar la expresión de f en términos de las funciones elementales implica hacer el proceso inverso a hallar el desarrollo de Taylor (lo que hicimos en la parte (a). Así, debemos identificar la función elemental que produce ese desarrollo de taylor.

Por un lado, veamos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(z+i)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m(z+i)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(z+i)}\right)^m$$

La cual es una **serie geométrica**, con $m = n+1$.

Así,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(z+i)}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2(z+i)}\right)} = \frac{1}{\frac{2(z+i)-1}{2(z+i)}} = \boxed{\frac{2(z+i)}{2(z+i)-1}}$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$$

La cual también es una **serie geométrica**, por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{1+i}\right)} = \frac{1}{\frac{1+i-z-i}{1+i}} = \boxed{\frac{1+i}{1-z}}$$

Finalmente,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^n} = \frac{2(z+i)}{2(z+i)-1} + \frac{1+i}{1-z} = \frac{2(i+z)(1-z)+(1+i)[2(z+i)-1]}{2(i+z)(1-z)-1+z} =$$

$$= \frac{2(i-iz+z-z^2)+2(z+i)-1+2i(z+i)-i}{2(z+i-z^2-iz)-1+z} = \frac{2i-2iz+2z-2z^2+2z+2i-1+2iz-2+i}{2z+2i-2z^2-2iz-1+z} =$$

$$\frac{-[2z^2-4z-3(1-i)]}{-[2z^2+(3-2i)z-(1-2i)]} = \frac{2z^2-4z-3(1-i)}{2z^2+(3-2i)z-(1-2i)}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{g(z) = \frac{2z^2-4z-3(1-i)}{2z^2+(3-2i)z-(1-2i)}}$$

Pregunta 2 (8 puntos) Sea la función

$$f(z) = \frac{sen(3z)}{e^{-2z} + 2z - 1}$$

Estudiar la naturaleza de la singularidad de f en z = 0.
Hallar además $\int_{|z|=1} f(z)dz$ usando la Fórmula de la integral de Cauchy.

<u>Solución</u>

En principio, puede parecer un poco problemático aplicar la fórmula de la integral de Cauchy en esta función. Ya que no tenemos una función de la forma $\frac{f(z)}{z-z_0}$. Sin embargo, en el desarrollo del ejercicio verán que la solución es algo más bien sencillo que se apega a la definición de la misma integral.

Consideremos la expansión en series de Taylor de la función $f(z)$.
Sabemos que,

$$sent = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots$$

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Entonces,

$$sen(3z) = 3z - \frac{(3)^3}{3!} z^3 + \frac{(3)^5}{5!} z^5 + \cdots$$

$$e^{-2z} = 1 - 2z + \frac{(2)^2}{2!} z^2 - \frac{(2)^3}{3!} z^3 + \cdots$$

Así,

$$f(z) = \frac{sen(3z)}{e^{-2z} + 2z - 1} = \frac{3z - \frac{(3)^3}{3!} z^3 + \frac{(3)^5}{5!} z^5 + \cdots}{1 - 2z + \frac{(2)^2}{2!} z^2 - \frac{(2)^3}{3!} z^3 + \cdots + 2z - 1} = \frac{3z - \frac{(3)^3}{3!} z^3 + \frac{(3)^5}{5!} z^5 + \cdots}{\frac{(2)^2}{2!} z^2 - \frac{(2)^3}{3!} z^3 + \cdots} =$$

$$= \frac{3 - \frac{(3)^3}{3!} z^2 + \frac{(3)^5}{5!} z^4 + \cdots}{\frac{(2)^2}{2!} z - \frac{(2)^3}{3!} z^2 + \cdots} = \frac{1}{z} \left(\frac{3 - \frac{(3)^3}{3!} z^2 + \frac{(3)^5}{5!} z^4 + \cdots}{\frac{(2)^2}{2!} - \frac{(2)^3}{3!} z + \cdots} \right) = \frac{g(z)}{z}$$

Donde, claramente g(z) es analítica (Ya que su desarrollo en series de Taylor no tiene potencias negativas de z).

Notemos, además, que $z = 0$ es un **polo simple**. Ya que posee términos finitos de la forma $(z - z_0)^{-n}$ donde $n = 1$ es la potencia más pequeña. Finalmente, calculemos la integral haciendo uso de la Fórmula de la integral de Cauchy

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i[g(z_0)] = 2\pi i[g(0)]$$

Tal que, si

$$g(z) = \frac{3 - \frac{(3)^3}{3!} z^2 + \frac{(3)^5}{5!} z^4 + \cdots}{\frac{(2)^2}{2!} - \frac{(2)^3}{3!} z + \cdots}$$

Entonces,

$$g(0) = \frac{3 - \frac{(3)^3}{3!} (0)^2 + \frac{(3)^5}{5!} (0)^4 + \cdots}{\frac{(2)^2}{2!} - \frac{(2)^3}{3!} (0) + \cdots} = \frac{3}{\frac{(2)^2}{2!}} = \frac{3}{2}$$

Así, podemos concluir que,

$$\boxed{\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i[g(0)] = 2\pi i\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i}$$

Pregunta 3 (15 puntos) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ distintos y sea

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

(a) Hallar los polos y los residuos de f.
(b) Tomar un contorno de integración apropiado con f(z) para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$$

(c) Suponiendo el paso al límite dentro del signo integral válido, deducir de la parte anterior que cuando b → a, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{cosx}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(a+1)\,e^{-a}$$

Solución

(a) Las singularidades aisladas de la función son aquellos valores que hacen que el denominador sea cero. Es decir $(z^2+a^2)(z^2+b^2) = 0$

Así, haciendo uso de la suma por su diferencia tenemos que,

$$(z^2+a^2)(z^2+b^2) = (z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi) = 0$$

Donde podemos identificar que que las singularidades de $f(z)$ son $\boxed{z_0 = ai}$, $\boxed{z_1 = -ai}$, $\boxed{z_2 = bi}$ y $\boxed{z_3 = -bi}$

Podemos ver, además, que todas son **polos simples** ya que ninguna se hace cero simultaneamente con el numerados. En cualquier caso, pueden verificar que si tomamos para cualquier singularidad

$$\lim_{z\to z_k} f(z) = \infty$$

Luego, el residuo se define como,

$$Res(f(z); z_k) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}\left((z-z_k)^m f(z)\right)$$

Donde, m denota el orden del polo.

Así, es fácil ver que el residuo para cada uno de los polos será

$$Res(f(z); ai) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)} = \lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z+bi)(z-bi)} = \boxed{\frac{e^{-a}}{(2ai)(b^2-a^2)}}$$

$$Res(f(z); -ai) = \lim_{z\to -ai}(z+ai)\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)} = \lim_{z\to -ai}\frac{e^{iz}}{(z-ai)(z+bi)(z-bi)} = \boxed{\frac{e^{a}}{(-2ai)(b^2-a^2)}}$$

$$Res(f(z);bi) = \lim_{z\to bi}(z-bi)\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)} = \lim_{z\to bi}\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)} = \boxed{\frac{e^{-b}}{(2bi)(b^2-a^2)}}$$

$$Res(f(z);-bi) = \lim_{z\to -bi}(z+bi)\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)} = \lim_{z\to -bi}\frac{e^{iz}}{(z-ai)(z+ai)(z-bi)} = \boxed{\frac{e^{b}}{(-2bi)(b^2-a^2)}}$$

(b) Como $f(x)$ es par, sabemos que

$$\int_0^\infty \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$$

Notemos que $Re[f(z)]$ modela a la función $f(x)$. Así que este problema lo podemos resolver haciendo uso de la teoría de variable compleja y luego la parte real de la solución será el valor de la integral impropia real.

Entonces, si tomamos como contorno a la semicircunferencia superior de radio R.

$$\int_{-R}^R \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = Re\left(2\pi i\sum_{k=1}^N Res(f(z);z_k) - \int_{C_R} f(z)dz\right)$$

Veamos que,

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_R} g(z)e^{iz}dz = 0$$

Ya que,

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right| = \frac{1}{|(z^2+a^2)(z^2+b^2)|} =$$

$$= \frac{1}{|z^4+(a^2+b^2)z^2+(ab)^2|} \leq \frac{1}{|z^4|+|(a^2+b^2)z^2|+|(ab)^2|} \leq \frac{1}{|z|^4} = \frac{1}{R^4} = M_R$$

Además, está acotada superiormente por $M_R\pi R$. Esto es,

$$|g(z)| \leq M_R\pi R = \frac{\pi R}{R^4} = \frac{\pi}{R^3}$$

Y cuando R $\to \infty$, la cota superior de $g(z)$ tiende a 0.

Por lo tanto,

$$\int_{-R}^R \frac{cosx}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dx = Re\left(2\pi i\sum_{k=1}^N Res(f(z);z_k)\right)$$

Como estamos tomando la semicircunferencia superior cuando $R\to\infty$, solo nos interesan las singularidades aisladas que están en el semiplano superior del plano complejo. Estás son $\boxed{z_0 = ai}$ y $\boxed{z_2 = bi}$

Así, tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}Re\left[\int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dx\right] = \frac{1}{2}Re\left[2\pi i\left(Res(f(z);ai) + Res(f(z);bi)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left[2\pi i\left(\frac{e^{-a}}{(2ai)(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{(2bi)(b^2-a^2)}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{ai}\right]$$

(c) Suponer válido el paso al límite dentro del signo integral implica que

$$\lim_{b\to a}\int_0^{\infty}\frac{cosx}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dx = \int_0^{\infty}\lim_{b\to a}\frac{cosx}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dx =$$

Tal que,

$$\lim_{b\to a}\frac{cosx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{cosx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{cosx}{(x+ai)^2(x-ai)^2}$$

Si trabajamos nuevamente en variable compleja y tomamos el mismo contorno que en la parte (b)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{cosx}{(x^2+ai)^2(x^2-ai)^2}dx = Re\left[2\pi i \cdot Res(f(z);ai)\right]$$

Donde, $z_0 = ai$ y $z_1 = -ai$ son **polos de segundo orden** (Aunque solo nos interesa el que está en el semiplano superior).

Por lo tanto,

$$Res(f(z);ai) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2\left(\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2(z-ai)^2}\right)\right] = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right) = \lim_{z\to ai}\frac{ie^{iz}(z+ai)^2 - 2e^{iz}(z+ai)}{(z+ai)^4}$$

$$\lim_{z\to ai}\frac{ie^{iz}(z+ai)-2e^{iz}}{(z+ai)^3} = \frac{ie^{iai}(ai+ai)-2e^{iai}}{(ai+ai)^3} = \frac{ie^{-a}(2ai)-2e^{-a}}{(2ai)^3} = \frac{2e^{-a}(iai-1)}{(2ai)^3} = \frac{-2e^{-a}(a+1)}{8a^3(-i)} = \boxed{\frac{e^{-a}(a+1)}{4a^3 i}}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{cosx}{(x^2+ai)^2(x^2-ai)^2}dx = \frac{1}{2}Re\left[2\pi i\cdot\left(\frac{e^{-a}(a+1)}{4a^3 i}\right)\right] = \boxed{\frac{\pi}{4a^3}(a+1)e^{-a}}$$

Este material ha sido creado para gecousb.com.ve

Solución y digitalización

Pablo Garrido
Estudiante de Ing. Electrónica
16-11296

Revisión
Samuel Alonso

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas a mi correo **garridop3@hotmail.com**